Hoja 1 de ejercicios. Autómatas y Computabilidad.
Facultad de Matemáticas. UCM

1. ¿Cuándo se cumple que $L^+ = L^*$? Justifica tu respuesta.
2. Dado un alfabeto Σ compuesto por k símbolos, demuestra que el número de palabras de longitud menor o igual que n es $(k^{n+1} - 1)/(k - 1)$.
3. Define dos lenguajes tales que no se cumpla $(L_1 \cup L_2)^* = {L_1}^* \cup {L_2}^*$.
4. Demuestra que se cumple que si $L_1 \subseteq L_2$ entonces ${L_1}^* \subseteq {L_2}^*$.
5. Demuestra que si $L_1 \subseteq L_2$ ó $L_2 \subseteq L_1$ entonces se verifica que $({L_1}^* \cup {L_2}^*) = (L_1 \cup L_2)^*$.
6. Demuestra por inducción que $im(im(x)) = x$, siendo im una función que calcula la palabra imagen.
7. Dado el lenguaje $L = \{a^3, a^5\}$, demuestra por inducción que para todo n mayor que 7 se cumple que $a^n \in L^+$.
8. Dado el alfabeto $\{a, b\}$, define el lenguaje formado por todas las palabras que contienen la subcadena "bb". Hazlo de dos formas: 1) como concatenación de lenguajes; 2) recursivamente.
9. Dado $\Sigma = \{a, b\}$, define el lenguaje formado por todas las palabras que no contienen la subcadena "bb". Hazlo mediante composición de lenguajes más simples ($\{a\}^*, \{b\} \ldots\ldots$).
10. Dado $\Sigma = \{a, b\}$, define el lenguaje de las palabras que no contienen dos símbolos seguidos iguales.
11. Dado $\Sigma = \{a, b\}$, define recursivamente los siguientes lenguajes: 1) palabras de la forma $a^m b^n$ tales que $n \geq 0$; 2) palabras de la forma $a^m b^n$ tales que $m > n \geq 0$; 3) palabras de la forma $b^n a^m$ tales que $n \geq m > 0$;
12. Dado $\Sigma = \{a, b\}$, define el lenguaje formado por todas las palabras de Σ^* menos ϵ y menos las que comiencen por "a".
13. Dado $\Sigma = \{a, b\}$, define el lenguaje formado por todas las palabras que tengan una y sólo una "a". Hazlo de dos formas: 1) recursivamente y 2) mediante operaciones sobre lenguajes más simples.
14. Repite el ejercicio anterior pero para el lenguaje en el que sus palabras, además de tener una y sólo una "a", también tengan al menos dos "b" seguidas.
15. Define recursivamente el lenguaje $L = \{a^3, a^4\}^*$. Demuestra que pertenece a dicho lenguaje toda palabra de seis o más símbolos que esté formada únicamente por "a"s.
16. Demuestra que si $x \in PAL$ entonces para todo $n \geq 0$ se cumple que $x^n \in PAL$.
17. ¿Se cumple que $PAL^* = PAL$? Demuéstralo si es cierto, o muestra un contraejemplo si no lo es.